

補足：数学的帰納法について

数学的帰納法に不慣れな人のために、簡単な解説をしておく。

まず、数学的帰納法には命題関数（述語）というものが登場する。命題関数とは、変数を含む文章のことである。例えば、

- n は素数である
- $n^2 \geq n$
- X は高校生ではない

などがそうだ。これらの文章は、 n や X などの「変数」に具体的な値を代入して初めて、真偽の確定した命題になる。要するに、命題関数とは与えられた数に対して一つの命題を対応させる「関数」なのである。

さて $P(n)$ を、自然数 n を変数とする命題関数としよう。数学的帰納法は、 $P(n)$ が全ての自然数 n について成り立つことを証明したい場合に用いられる証明法である。

数学的帰納法による証明は、次の数学的帰納法の原理¹に立脚している。

◆ 数学的帰納法の原理

自然数 n を変数とする命題関数 $P(n)$ について、

1. $P(1)$ は真
2. いかなる自然数 k についても、 $P(k)$ が真ならば $P(k+1)$ も真

ならば、全ての自然数 n について $P(n)$ は真。

何を言っているか分かるだろうか。数学的帰納法はよく、ドミノ倒しに例えられる。まず 1. と 2. より、 $P(2)$ が真であることが言える。すると今度はこれと 2. から、 $P(3)$ が真であることが言える。同様にして $P(4)$, $P(5)$, ... が「ドミノ倒し式」に言えるので、結局全ての自然数 n について $P(n)$ が真であることが言えるというわけだ。

数学的帰納法の中身は単に、上の 1. と 2. を証明するだけである。通常の作法に乗っ取って少し「まどろっこしい」言い方をすれば、

1. $n = 1$ のとき $P(n)$ が成り立つことを証明する
2. $n = k$ のとき $P(n)$ が成り立つことを仮定して、 $n = k + 1$ でも成り立つことを証明する

となる。これで、 $P(n)$ が全ての自然数 n について成り立つことが証明できるわけだ。

¹「原理」と名がついているが、実はこれは自然数についての公理であるペアノの公理の1つだ。ペアノの公理とは、自然数の本質を抽出したものと思ってもらえばよい。その中でも数学的帰納法の原理は、「いかなる自然数にも、1から順番に2,3,...と数えていけば、いつかは辿り着ける」という特徴を捉えたものである。